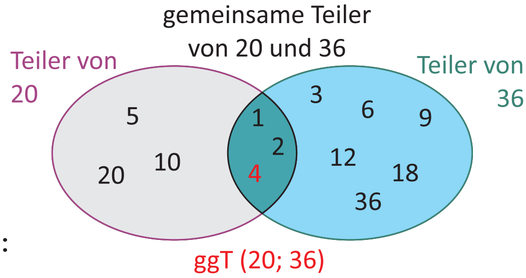
Der größte gemeinsame Teiler (ggT)

Der ggT ist der größte gemeinsame Teiler zweier ganzer Zahlen - also die größte natürliche Zahl, durch die sich beide Zahlen teilen lassen.



Wie bestimmt man den größten gemeinsamen Teiler (ggT) zweier Zahlen? Dazu gibt es drei Möglichkeiten:
- durch Vergleich der Teilermengen
- Über die Primfaktorzerlegung
- Über den euklidischen Algorithmus

Bildung des ggT mittels Teilermengen

Wir suchen den ggT von 16 und 24.

T (16) = {1; 2; 4; **8**; 16}

T (24) = {1; 2; 3; 4; 6; **8**; 12; 24}

gemeinsame Teiler {1; 2; 4; 8}

ggT (16; 24) = 8

1. Wir bilden von jeder Zahl die Teilermenge.
2. Wir bestimmen durch Vergleich den größten gemeinsamen Teiler.

Die größte Zahl, die in beiden Mengen auftaucht, ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen.

Bildung des ggT mit der Primfaktorzerlegung

Wir suchen den ggT von 16 und 24.

Primfaktorzerlegung von 16 = $\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 2$

Primfaktorzerlegung von 24 = $\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 3$

ggT(16;24) = $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Wir suchen den ggT von 36 und 60.

Primfaktorzerlegung von 36 = $\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot 3$

Primfaktorzerlegung von 60 = $\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot 5$

ggT(36;60) = $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

1. Jede der Zahlen wird in ihre Primfaktoren zerlegt.
2. Wir suchen die Teiler, die in beiden Zahlen gemeinsam vorkommen.
3. Wir bilden das Produkt der gemeinsamen Teiler und erhalten dadurch den ggT.

Wenn eine Zahl durch eine andere Zahl teilbar ist, dann bildet die andere Zahl den ggT.

Beispiel: 14 ist durch 7 teilbar, also ist der ggT = 7

Der ggT zweier teilerfremder Zahlen ist immer 1.

Der größte gemeinsame Teiler (ggT)

Der euklidische Algorithmus ist die schnellste Methode, um den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von **zwei** Zahlen zu bestimmen, besonders bei größeren Zahlen.

Wie funktioniert der euklidische Algorithmus?
Man teilt zuerst die größere der beiden Zahlen durch die kleinere. Der Rest wird zum neuen Divisor. Der alte Divisor wird zum Dividenden. Nun setzt man das Verfahren fort - die kleinere Zahl wird immer durch den Rest geteilt. Dies wird so lange wiederholt, bis der Rest 0 ist. Der letzte Rest, der von Null verschieden ist, ist der größte gemeinsame Teiler (ggT).

Beispiel:

Wir suchen den ggT von 8400 und 212.

8400 : 212 ergibt 39 Rest 132
212 : 132 ergibt 1 Rest 80
132 : 80 ergibt 1 Rest 52
80 : 52 ergibt 1 Rest 28
52 : 28 ergibt 1 Rest 24
28 : 24 ergibt 1 Rest **4**
24 : **4** ergibt 6 Rest 0

ggT (8400; 212) = **4**

1. Wir teilen zuerst die größere Zahl durch die kleinere Zahl.
2. Wir teilen die kleinere Zahl durch den Rest, der bei dem Schritt davor herauskommt.
3. Wir wiederholen Schritt 2 - der Rest wird zum neuen Divisor. Der alte Divisor wird zum Dividenden. Wir wiederholen diese Schritte so lange, bis bei einer Rechnung der Rest 0 herauskommt.

...

4. Bei diesem Schritt ist der Rest Null - **4** ist der ggT von 8400 und 212. Dies ist der letzte Rest, der von Null verschieden ist.

Wir suchen den ggT von 9640 und 1205.

9640 : **1205** ergibt 8 Rest 0

ggT (9640; 1205) = **1205**

Wenn eine Zahl durch eine andere Zahl teilbar ist, dann bildet die andere Zahl den ggT den beiden Zahlen.

Wir suchen den ggT von 457 und 149.

457 : 149 ergibt 3 Rest 10
149 : 10 ergibt 14 Rest 9
10 : 9 ergibt 1 Rest 1
9 : **1** ergibt 9 Rest 0

ggT (457; 149) = **1**

Zwei Zahlen, die keinen gemeinsamen Primfaktor haben, heißen teilerfremde Zahlen.
Der ggT zweier teilerfremder Zahlen ist immer 1.